**Санкт-Петербургский государственный университет**

**Р А Б О Ч А Я П Р О Г Р А М М А**

**УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

Избранные вопросы современного математического анализа

Modern Mathematical Analysis: Special Topics

**Язык(и) обучения**

русский

Трудоемкость в зачетных единицах: 2

Регистрационный номер рабочей программы: 051656

**Раздел 1. Характеристики учебных занятий**

**1.1. Цели и задачи учебных занятий**

Сообщить дополнительные сведения по математическому анализу, познакомить обучающихся с несколькими современными направлениями исследований. Формирование у обучающихся навыков научной работы.

**1.2. Требования подготовленности обучающегося к освоению содержания учебных занятий (пререквизиты)**

Владение курсом «Математический анализ» и начальными понятиями курса «Функциональный анализ».

**1.3. Перечень результатов обучения (learning outcomes)**

Обучающийся должен овладеть теоретическим материалом в объеме, предусмотренном программой, уметь применять полученные знания при решении теоретических и прикладных задач в области математического анализа. В частности обучающийся должен овладеть основными понятиями и методами эргодической теории и основами абстрактного гармонического анализа.

**1.4. Перечень и объём активных и интерактивных форм учебных занятий**

Аудиторная учебная работа: 5-й семестр, лекционные занятия.  
Самостоятельная работа: индивидуальное изучение методических материалов и рекомендованной литературы.

**Раздел 2. Организация, структура и содержание учебных занятий**

**2.1. Организация учебных занятий**

**2.1.1 Основной курс**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Трудоёмкость, объёмы учебной работы и наполняемость групп обучающихся | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Код модуля в составе дисциплины,  практики и т.п. | Контактная работа обучающихся с преподавателем | | | | | | | | | | | | Самостоятельная работа | | | | Объём активных и интерактивных  форм учебных занятий | Трудоёмкость |
| лекции | семинары | консультации | практические  занятия | лабораторные работы | контрольные работы | коллоквиумы | текущий контроль | промежуточная  аттестация | итоговая аттестация | под руководством преподавателя | в присутствии  преподавателя | сам. раб. с использованием  методических материалов | текущий контроль (сам.раб.) | промежуточная аттестация (сам.раб.) | итоговая аттестация  (сам.раб.) |
| ОСНОВНАЯ ТРАЕКТОРИЯ | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Форма обучения: очная | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Семестр 5 | 30 |  |  |  |  |  |  |  | 2 |  |  |  | 30 |  | 10 |  | 10 | 2 |
|  | 2-100 |  |  |  |  |  |  |  | 10-25 |  |  |  | 1-1 |  | 1-1 |  |  |  |
| ИТОГО | 30 |  |  |  |  |  |  |  | 2 |  |  |  | 30 |  | 10 |  |  | 2 |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Виды, формы и сроки текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации | | | | | | |
| Код модуля в составе дисциплины, практики и т.п. | Формы текущего контроля успеваемости | | Виды промежуточной аттестации | | Виды итоговой аттестации  (только для программ итоговой аттестации и дополнительных образовательных программ) | |
| Формы | Сроки | Виды | Сроки | Виды | Сроки |
| ОСНОВНАЯ ТРАЕКТОРИЯ | | | | | | |
| Форма обучения: очная | | | | | | |
| Семестр 5 |  |  | зачёт, устно, традиционная форма | по графику промежуточной аттестации |  |  |

**2.2. Структура и содержание учебных занятий**

Период обучения: Семестр 5

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **№ п.п** | **Наименование темы (раздела, части)** | **Вид учебных занятий** | **Кол-во часов** |
| 1 | Раздел 1. Эргодическая теория | лекции | 6 |
| самост. работа с использованием  методических материалов | 6 |
| 2 | Раздел 2. Эргодичность и перемешивание | лекции | 6 |
| самост. работа с использованием  методических материалов | 6 |
| 3 | Раздел 3. Энтропия. Теорема Колмогорова-Синая | лекции | 6 |
| самост. работа с использованием  методических материалов | 6 |
| 4 | Раздел 4. Анализ Фурье на группах. | лекции | 6 |
| самост. работа с использованием  методических материалов | 6 |
| 5 | Раздел 5. Меры и преобразования Фурье на тонких множествах. Спектральный синтез | лекции | 6 |
| самост. работа с использованием  методических материалов | 6 |
| 6 | Промежуточная аттестация | самостоятельная работа | 102 |
| зачет | 1 20 |
| Итого | | | 7722 |

**Раздел 1. Эргодическая теория.**

Вероятностные и механические истоки ЭТ. Топологический и метрический аспекты динамики. Основные примеры динамических систем с инвариантной мерой. Инвариантные меры. Теорема Крылова - Боголюбова. Теорема Пуанкаре о возвращении. Теорема о разложении меры на эргодические компоненты. Эргодичность и связанные с ней свойства (с примерами). Индивидуальная эргодическая теорема Биркгофа - Хинчина. Равномерная распределенность последовательности, связанной с иррациональным сдвигом. Нормальные числа.

**Раздел 2. Эргодичность и перемешивание.**

Перемешивание. Функциональные переформулировки эргодичности и перемешивания. Оператор, сопряженный с авто(эндо)морфизмом. Его свойства. Понятие о спектре унитарного оператора. Понятие о спектральном изоморфизме, соотношение с метрической сопряженностью. Слабое перемешивание и спектр. Дискретный спектр, теорема фон Неймана.

**Раздел 3. Энтропия. Теорема Колмогорова-Синая.**

Измеримые разбиения, операции над ними, классификация. Теорема о канонической системе условных мер (формулировка). Энтропия разбиения. Средняя условная энтропия. Средняя условная энтропия на единицу времени. Энтропия эндо(авто)морфизма, теорема Колмогорова - Синая. Теорема Шеннона - Макмиллана - Брэймана (без доказательства).

**Раздел 4. Анализ Фурье на группах.**

Свёртка функций и мер на локально компактной абелевой группе. Характеры. Двойственная группа. Преобразование Фурье. Положительно определённые функции. Теорема Планшереля. Теорема двойственности Понтрягина. Компактификация по Бору. Основная структурная теорема. Преобразование Фурье на подгруппах и факторгруппах.

**Раздел 5. Меры и преобразования Фурье на тонких множествах. Спектральный синтез.**

Независимые множества и множества Кронекера. Существование совершенных множеств Кронекера. Множества Хелсона. Множества Сидона. Замкнутые идеалы в пространстве суммируемых функций на группе. Тауберова теорема Винера. Пример Шварца отсутствия спектрального синтеза. Примеры Герца множеств, допускающих спектральный синтез. Теорема Мальявэна. Идеалы, которые не замкнуты относительно комплексного сопряжения.

**Раздел 3. Обеспечение учебных занятий**

**3.1. Методическое обеспечение**

**3.1.1 Методические указания по освоению дисциплины**

Успешное освоение дисциплины возможно благодаря посещению лекций, участию в обсуждении вопросов, подготовленных к занятию, самостоятельной работе, включающей в себя чтение специальной литературы по разделам темы, подготовка презентаций по тематике курса.

**3.1.2 Методическое обеспечение самостоятельной работы**

Основная и дополнительная литература.

**3.1.3 Методика проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации и критерии оценивания**

Зачет проводится в устной форме. Билет содержит 2 вопроса, на подготовку к ответу в аудитории отводится не менее 1 академического часа.

После ответа на вопросы билета, преподаватель вправе задать дополнительные вопросы по любой теме из списка вопросов, вынесенных на зачет. В качестве дополнительных используются вопросы, не требующие длительного вывода и трудоемких вычислений, в том числе основные определения, примеры и логические связи, содержащиеся в курсе.

После ответа на основные и дополнительные вопросы экзаменуемому может быть выдана задача, требующая применения основных идей курса.

По совокупности ответов экзаменуемого выставляется оценка «зачет», «незачет».

Критерии выставления оценок за ответ на зачете:

Оценка «зачет» выставляется, если выполняются три условия:

1. Экзаменуемым в целом дан ответ по всем вопросам билета;

2. Экзаменуемый отвечает более чем на 70% дополнительных вопросов.

3. Экзаменуемый решил выданную задачу.

Оценка «незачет» выставляется, если не выполняются условия для получения оценки «зачет».

**3.1.4 Методические материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации (контрольно-измерительные материалы, оценочные средства)**

Примерный список вопросов к зачету:

1. Вероятностные и механические истоки ЭТ. Топологический и метрический аспекты динамики.

2. Основные примеры динамических систем с инвариантной мерой.

3. Инвариантные меры. Теорема Крылова - Боголюбова. Примеры.

4. Теорема Пуанкаре о возвращении.

5. Теорема о разложении меры на эргодические компоненты.

6. Индивидуальная эргодическая теорема Биркгофа - Хинчина.

7. Равномерная распределенность последовательности, связанной с иррациональным сдвигом. Нормальные числа.

8. Перемешивание. Функциональные переформулировки эргодичности и перемешивания.

9. Слабое перемешивание и спектр.

10. Дискретный спектр, теорема фон Неймана.

11. Измеримые разбиения, операции над ними, классификация. Теорема о канонической системе условных мер (формулировка). Энтропия разбиения.

12. Средняя условная энтропия. Средняя условная энтропия на единицу времени.

13. Энтропия эндо(авто)морфизма, теорема Колмогорова - Синая.

Локально компактные абелевы группы.

14. Инвариантные функционалы. Мера Хаара на локально компактной абелевой группе.

15. Характеры. Двойственная группа. Преобразование Фурье. Положительно определённые функции.

16. Теорема двойственности Понтрягина. Компактификация по Бору.

17. Основная структурная теорема.

18. Преобразование Фурье на подгруппах и факторгруппах.

19. Идемпотентные меры.Тривиальные случаи. Сведение к случаю компактных групп.

20. Независимые множества и множества Кронекера. Существование совершенных множеств Кронекера.

21. Множества Хелсона. Множества Сидона.

22. Тауберова теорема Винера.

23. Пример Шварца отсутствия спектрального синтеза. Примеры Герца множеств, допускающих спектральный синтез.

**3.1.5 Методические материалы для оценки обучающимися содержания и качества учебного процесса**

Оценка обучающимися содержания и качества учебного процесса по дисциплине осуществляется в установленном в СПбГУ порядке.

**3.2. Кадровое обеспечение**

**3.2.1 Образование и (или) квалификация штатных преподавателей и иных лиц, допущенных к проведению учебных занятий**

К проведению занятий должны привлекаться преподаватели, имеющие ученую степень доктора или кандидата наук (в том числе степень PhD, прошедшую установленную процедуру признания и установления эквивалентности) и/или ученое звание профессора или доцента.

**3.2.2 Обеспечение учебно-вспомогательным и (или) иным персоналом**

Не требуется.

**3.3. Материально-техническое обеспечение**

**3.3.1 Характеристики аудиторий (помещений, мест) для проведения занятий**

Стандартно оборудованные лекционные аудитории, должны вмещать поток в соответствии со списком студентов.

**3.3.2 Характеристики аудиторного оборудования, в том числе неспециализированного компьютерного оборудования и программного обеспечения общего пользования**

Доска для письма мелом или фломастером.

**3.3.3 Характеристики специализированного оборудования**

Не требуется.

**3.3.4 Характеристики специализированного программного обеспечения**

Не требуется.

**3.3.5 Перечень и объёмы требуемых расходных материалов**

Мел — не менее 1 куска на час лекционных занятий, фломастеры для доски, губка.

**3.4. Информационное обеспечение**

**3.4.1 Список обязательной литературы**

1. Рудин У. Функциональный анализ. СПб: Лань, 2005.

2. Халмош П. Лекции по эргодической теории. М., 1959.

3. Корнфельд И.П., Синай Я.Г., Фомин С.В. Эргодическая теория. М., 1980.

**3.4.2 Список дополнительной литературы**

1. Биллингслей П. Эргодическая теория и информация. М., 1969.

2. Рохлин В.А. Лекции по энтропийной теории преобразований с инвариантной мерой. Успехи математических наук, 1967, т. 22, вып. 5, с. 3-56.

3. Хьюитт Э., Росс К., Абстрактный гармонический анализ, том 1. Москва, «Наука», 1975.

4. Хьюитт Э., Росс К., Абстрактный гармонический анализ, том 2. Москва, «Наука», 1975.

5. Моррис С. Двойственность Понтрягина и строение локально компактных абелевых групп. Москва, «Мир», 1980.

6. Люмис Л. Введение в абстрактный гармонический анализ. Москва, ИЛ, 1956.

7. Понтрягин П.С. Непрерывные группы. Москва, «Наука», 1972.

**3.4.3 Перечень иных информационных источников**

Не требуется.

**Раздел 4. Разработчики программы**

Баранов Антон Дмитриевич, доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры математического анализа, [a.d.baranov@spbu.ru](mailto:a.d.baranov@spbu.ru).

Лодкин Андрей Александрович, кандидат физ.-мат. наук, доцент, доцент кафедры математического анализа, alodkin@gmail.com.